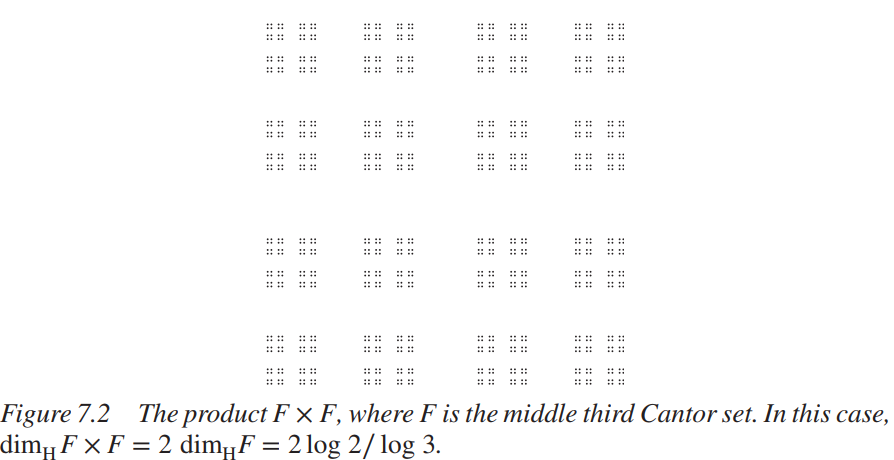
7.1 乘积公式 2020年6月19日14点26分

回想一下,如果是的子集,而F是的子集,则笛卡尔乘积或只是乘积,则将定义为在E中具有第一坐标而在F中具有第二坐标的点集,即,

因此,如果E是的单位区间,而F是的单位区间,则E×F是中的单位平方（图7.1）.同样,如果F是三分康托集,则F×F是“康托积”（图7.2），由平面上的这些点组成，两个坐标都在F中.



在上述第一个示例中，很明显

使用维度的经典定义.在“平滑”情况下,这更普遍,其中E和F是平滑曲线,曲面或高维流形.不幸的是,该等式并不总是适用于“分形”维.对于Hausdorff维度,可能的最佳一般结果是不等式。然而，正如我们将在许多情况下看到的那样,等号确实成立.

命题7.1 如果是Borel集且,则

其中仅取决于和.

乘积公式7.2 如果是Borel集,则

乘积公式7.3 对任意集合

推论7.4 如果则

乘积公式7.5 对任意集合,

例题7.6 均匀康托集乘积 令E,F为的子集,其中F为均匀的Cantor集(请参见例题4.5).则.

例题7.7 “康托目标”是在极坐标中通过给出的平面集合,其中是三分康托集合(见图7.3).然后.

例题7.8 存在集合使得,.

命题7.9 令为的Borel子集.如果,则

推论7.10 令F为的Borel子集.然后,对几乎所有(从一维Lebesgue度量的意义上),.

命题7.11 令F为的任意子集,令E为x轴的任意子集.假设有一个常数c使得对所有x∈E都有.则

其中仅取决于s和t.

推论7.12 令F为的任意子集,令E为x轴的任意子集.如果对所有x∈E成立,则.